

ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ:	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π. / Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	05 / 01 / 2026

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι συνάρτηση $f(x) = a^x$, $a > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

και ισχύει: $f'(x) = a^x \ln a$.

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Rolle και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία .

Μονάδες 2 + 2 = 4

A3. α) Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $-\infty$;

Μονάδες 2

β) Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε διάστημα Δ . Να δώσετε τον ορισμό της αρχικής συνάρτησης ή παράγουσας της f στο Δ .

Μονάδες 2

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

β) Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

γ) Κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ , έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.

δ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

(πεπερασμένο ή άπειρο), τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

- ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα $[\alpha, \beta]$ και υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$, τότε υποχρεωτικά η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) .

Μονάδες 10**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2\alpha x + \alpha + 1 & , x < 0 \\ 2x + \eta\mu 2x + \beta & , x \geq 0 \end{cases}$.

B1. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Αν $\alpha = 2$ και $\beta = 3$, τότε:

B2. (i) Να αποδείξετε ότι η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Ενδιάμεσων

Τιμών στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \pi$.

Μονάδες 3 + 3 = 6

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ στο $(-\infty, 0)$.

Μονάδες 6

B4. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη (ϵ) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0, f(0))$, έχει εξίσωση (ϵ): $y = 4x + 3$ (μονάδες 3) και στην συνέχεια ότι η ευθεία (ϵ) εφάπτεται και στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = 2\ln(x - 3) + x^2 - 6x + 27$, $x > 3$ (μονάδες 4).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = (x-2) \cdot \ln(x-2)$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο σύνολο $\Delta_1 = \left(2, 2 + \frac{1}{e}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο σύνολο

$$\Delta_2 = \left[2 + \frac{1}{e}, +\infty\right).$$

Γ1. α. Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (μονάδες $2 + 1 = 3$)

β. Να βρείτε τα σύνολα τιμών $f(\Delta_1)$ και $f(\Delta_2)$.

Μονάδες $3 + 2 = 5$

Γ2. α. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης: $x - e^{\frac{\lambda}{x-2}} = 2$, με $\lambda \in \left(-\frac{1}{e}, 0\right)$.

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $3f'(3) + 2f'(4) + f'(5) - 6 = 6\ln(x-2)$ έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in (3, 5)$.

Μονάδες $4 + 5 = 9$

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{4}(x-2)^2 \cdot [2\ln(x-2) - 1]$, $x > 2$.

Γ3. Να δείξετε ότι η g είναι παράγουσα της f στο διάστημα $(2, +\infty)$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g'(x)$.

Μονάδες $3 + 3 = 6$

Γ4. Να δείξετε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός $\xi \in (3, e+2)$, τέτοιος ώστε:

$$4g'(\xi) = \frac{e^2 + 1}{e - 1}.$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για την οποία ισχύουν :

- $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f'(p) = -2$, $p < 3$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{6 - xf(x)}{x^2 - 9} = \frac{2}{3}$.

Δ1. Να δείξετε ότι: $f(3) = 2$ και $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες $2 + 3 = 5$

Δ2. α. Να δείξετε ότι $L = 3f''(x)$, όπου $L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+3h) + 2f(x) - 3f(x+h)}{h^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

β. Αν η f'' είναι συνεχής στο $x_0 = 3$ και $L = 6$, να βρείτε την ασύμπτωτη της C_g στο $-\infty$, όπου $g(x) = 2\sqrt{x^2 + 1} + (f''(3) + 1)x$.

Μονάδες 4

Δ3. α. Αν σημείο $M(x, y)$ κινείται πάνω στην εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(3, f(3))$ έτσι ώστε η τετμημένη του να μειώνεται με ρυθμό 2 cm/sec , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του.

Μονάδες 3

β. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

Μονάδες 5

Δ4. Αν f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και F παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι:
 $2F(5) > F(4) + F(6)$.

Μονάδες 4